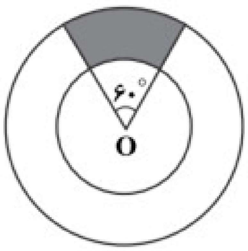
پایه تحصیلی : دوازدهم ریاضی

زمان آزمون : ۷۵ دقیقه

نام آموزشگاه : دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۰۷/۱۹

۱) دو دایره با شعاع ۶ و ۹ مطابق شکل داریم. محیط ناحیه‌ی رنگی کدام است؟

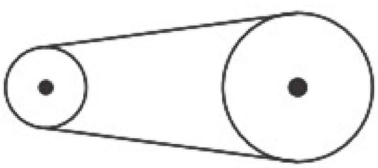


۱) $۳\pi + ۵$　۲) $۶\pi + ۵$　۳) $\pi + ۶$　۴) $۵\pi + ۶$

۲) یکی از زوایای یک مثلث متساوی‌الساقین برابر $\frac{۷\pi}{۱۲}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی دیگر این مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۵　۲) ۴۲/۵　۳) ۳۵　۴) ۳۷/۵

۳) در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های R و $\frac{R}{۴}$ را به هم وصل کرده است. اگر قرقرهٔ کوچک‌تر به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ رادیان بچرخد، قرقرهٔ بزرگ‌تر چند درجه می‌چرخد؟

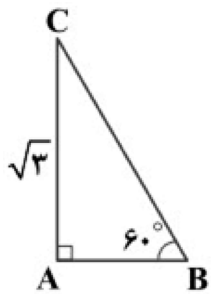


۱) ۱۵°　۲) ۹۰°　۳) $۲۲/۵^\circ$　۴) ۴۵°

۴) کدام‌یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها برحسب رادیان هستند.)

۱) $\text{Cos}\ ۲$　۲) $\text{Cos}\ ۴$　۳) $\text{Cos}\ ۶$　۴) $\text{Cos}\ ۸$

۵ در شکل مقابل طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶ سینوس زاویه‌ی ۶۰°، چند برابر کتانژانت زاویه‌ی ۶۰° است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

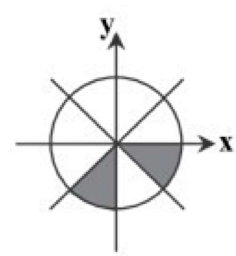
۷ حاصل $\frac{۲\operatorname{Sin}۳۰^\circ \operatorname{Cos}۳۰^\circ}{۱-\operatorname{Cos}۶۰^\circ}$ کدام است؟

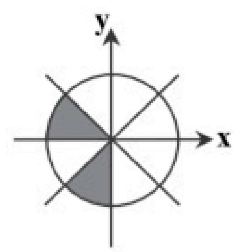
۱) $\operatorname{Cos}۴۵^\circ$ ۲) $\cot ۳۰^\circ$ ۳) $\operatorname{Sin}۶۰^\circ$ ۴) $\cot ۶۰^\circ$

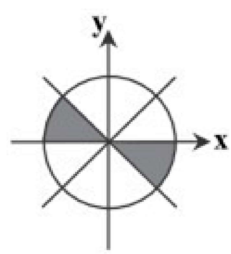
۸ اگر بیشترین مقدار عبارت $A=(۲a+۱)-۳\operatorname{Sin}x$ برابر ۸ باشد، a کدام است؟

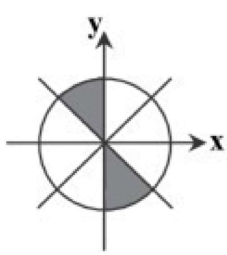
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹ اگر $\operatorname{Sin}\alpha . \operatorname{Cos}\alpha < ۰$ و $\tan\alpha < \cot\alpha$، آنگاه α در کدام ناحیه‌ی رنگی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

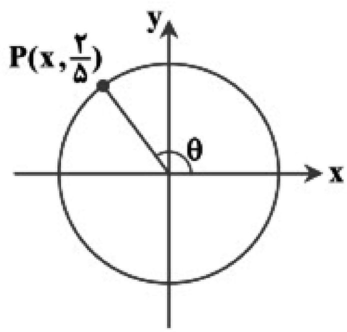
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰ اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل روبه‌رو، نقطه‌ای به مختصات $P\left(x,\frac{۲}{۵}\right)$ باشد، $\cot\theta$ چند برابر $\sqrt{۲۱}$ است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $-\frac{۲}{۲۱}$

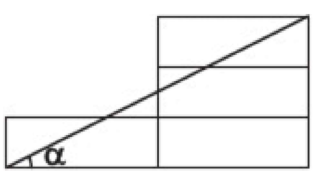
۱۱ اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، حاصل عبارت $A = \dfrac{۲\text{Sin}۲۵۰^\circ + ۳\text{Sin}۳۴۰^\circ}{\text{Cos}۲۰۰^\circ - ۴\text{Cos}۴۳۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

۱۲ اگر $\tan\alpha = ۲$، مقدار $A = \dfrac{۱+\cot\alpha}{۱+\text{Cos}^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۳ در شکل مقابل، هر کاشی یک مستطیل ۱×۲ است. مقدار $\text{Cos}\,\alpha$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۱۴ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\left(\dfrac{۱}{\text{Sin}\,x} - \text{Sin}\,x\right)\dfrac{\text{tg}\,x}{\sqrt{۱+\text{tg}^۲x}}$، کدام است؟

۱) $-\text{Cos}^۲x$ ۲) $-\text{Cos}\,x$ ۳) $\text{Cos}^۲x$ ۴) $\text{Cos}\,x$

۱۵ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\left(۲\,\text{Sin}^۲\left(\frac{\pi}{۴}\right) - \text{Sin}^۲x\right)\sqrt{۱+\text{tg}^۲x}$، کدام است؟

۱) $\text{Sin}\,x$ ۲) $\text{Cos}\,x$ ۳) $-\text{Sin}\,x$ ۴) $-\text{Cos}\,x$

۱۶) $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}=\begin{bmatrix}۳&۱\\۵&۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌جمع درایه‌های غیرقطر اصلی $(A^{-۱}+B)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $-\frac{۹}{۴}$

۱۷) اگر A، ماتریس مربعی و غیرصفر باشد و $A^۲=۳A$ باشد. به ازای کدام مقدار k ماتریس‌های $۳A+I$ و $kA+I$ وارون یک‌دیگرند؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $-۰/۳$ ۴) $-۰/۲$

۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix}۰&-۴\\۴&۸\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}+۳I$ دترمینان $\left|\frac{A^۵}{۴۵}\right|$ کدام است؟

۱) $۴۵^۴$ ۲) $۴۵^۳$ ۳) $۴۵^۲$ ۴) ۴۵

۱۹) اگر $I=\begin{bmatrix}۴^{x-y}&۰\\x+y+z&۵^{x-۴}\end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های توان دوم ماتریس $A=\begin{bmatrix}x&-۱\\y&z\end{bmatrix}$ کدام است؟ (I ماتریس همانی است.)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۲۰) اگر $A=B=\begin{bmatrix}k&۱\\۱&-k+۲\end{bmatrix}$ ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) بستگی به مقدار k دارد.

۲۱) در رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱۲&-۱۷\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۲۱&۳۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱۷&۳۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۲&-۲۱\end{bmatrix}$

۲۲) اگر $A^۳+A^۲+A+I=O$ باشد، آن‌گاه وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A^۳$ ۲) $-A^۳$ ۳) $A^۳+I$ ۴) $A^۳-I$

۲۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه وارون ماتریس $A^۲-A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$

۲۴) اگر $A\begin{bmatrix}۲&-۱&۵\\-۳&۲&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ و x درایه‌ی سطر اول و ستون دوم ماتریس AB و y درایه‌ی سطر دوم و ستون اول BA باشد، آن‌گاه xy کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۲۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

۲۵ اگر وارون $A = \begin{bmatrix} m^2 & m \\ 4 & m \end{bmatrix}$ وجود نداشته باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) صفر

۲۶ اگر $I = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ 0 & b \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & a \\ 1+b & b \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۲۷ اگر در یک ماتریس ۲×۲ درایه‌های روی قطر اصلی را k برابر و درایه‌ی a_{12} را k^2 برابر کنیم، دترمینان ماتریس چند برابر می‌شود؟

۱) k ۲) k^3 ۳) k^2 ۴) ۱

۲۸ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $AA^T B = 52I$. اگر $|B| = 104$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۹ اگر ماتریس ناصفر $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a، کدام است؟

۱) ۴- ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۲

۳۰ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۱ روش به کار رفته در کدام استدلال درست است؟

۱)
n فرد است $\rightarrow$ n^2 فرد باشد.
۴۹ فرد است.

∴ ۷ فرد است.

۲)
اگر زمستان باشد، آن‌گاه هوا سرد است.
هوا سرد است.

∴ زمستان است.

۳)
$x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$
$5 > 0$

$\therefore 25 > 0$

۴)
اگر دو خط موازی باشند، آن‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.
d_1 ، d_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

∴ d_1 ، d_2 موازی‌اند.

۳۲ در کدام استدلال خطا وجود دارد؟

۱) $a^2 < b^2 \Rightarrow 2a < 2b$

۲) $a^3 < b^3 \Rightarrow 3a < 3b$

۳) $\frac{2}{3}a < \frac{2}{3}b \Rightarrow -6a > -6b$

۴) $5a + 2 < 3b + 2 \Rightarrow a < \frac{3}{5}b$

۳۳) اگر $a > 1$ و $a|11k+4$ و $a|7k-1$، بزرگ‌ترین مقدار اول a کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۳۴) برای اثبات گزاره‌ی «اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$» به روش بازگشتی از کدام نابرابریِ بدیهی استفاده می‌شود؟

۱) $a^2 > 0$ ۲) $(a+1)^2 > 0$ ۳) $(a-1)^2 \geq 0$ ۴) $a \geq 1$

۳۵) درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را با مثال نقض می‌توان رد کرد؟

- اگر عددی به هر دو عدد ۱۲ و ۱۵ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه به ۱۸۰ نیز بخش‌پذیر است.
- اگر عددی در تقسیم بر اعداد ۵ و ۷ به‌ترتیب باقی‌مانده‌های ۳ و ۴ داشته باشد آن‌گاه آن عدد در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده‌ی ۱۲ خواهد داشت.
- اگر مربع عددی مضرب ۶۳ باشد آن‌گاه خود آن عدد نیز مضرب ۶۳ خواهد بود.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶) اگر k عددی زوج باشد، بزرگ‌ترین عددی که همواره $k^3 - 4k$ بر آن بخش‌پذیر می‌باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۳۷) a_1 و a_2 و a_3 اعداد صحیح‌اند و b_1 و b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیب متفاوت از قبل، حاصل نهایی عبارت $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ الزاماً چه عددی است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) اول ۴) صحیح نامنفی

۳۸) زوج بودن $a - b$ با کدام گزاره هم‌ارز <u>نیست</u>؟

۱) زوج بودن $a + b$ ۲) زوج بودن $2a + b$

۳) زوج بودن $5a + 7b$ ۴) زوج بودن $a + b + 1398$

۳۹) کدام گزینه مثال نقض دارد؟

۱) نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی هر مثلث همواره داخل مثلث است.

۲) اگر در مثلثی نیمساز خارجی یک رأس با ضلع مقابلش موازی باشد، آن‌گاه مثلث متساوی‌الساقین است.

۳) برای هر عدد طبیعی n، $n^2 - 5n + 17$ عددی فرد است.

۴) برای هر عدد طبیعی n، $n^3 + n^2 + 17$ عددی اول است.

۴۰) یکی از مثال‌های نقض برای حکم «هر دو عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت.» کدام عدد است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۴۱) در اثبات $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ به روش بازگشتی، گزاره همیشه درست کدام گزینه <u>نمی‌تواند</u> باشد؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

۱) $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ ۲) $(a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$

۳) $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq 0$ ۴) $(a+b)^2 + 2a^2 + 2b^2 \geq 0$

۴۲ در اثبات حکم «به‌ازای هر دو عدد حقیقی ناصفر و هم‌علامت x و y داریم $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant ۲$» به روش بازگشتی به کدام گزاره‌ی همیشه درست می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲\geqslant ۰$
۲) $(x+y)^۲\geqslant ۰$
۳) $x^۲+y^۲\geqslant ۰$
۴) $\left(\frac{x}{y}\right)^۲+\left(\frac{y}{x}\right)^۲\geqslant ۰$

۴۳ کدام‌یک از قضایای زیر را نمی‌توان به صورت قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟

۱) $a>۱\Rightarrow a^۳>a^۲$
۲) $a>b\Rightarrow a^۳>b^۳$
۳) $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰$ (a و b نامنفی هستند.)
۴) $a>۱\Rightarrow a^۲>۱$

۴۴ اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام گزاره‌ی زیر همواره درست است؟

۱) اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آن‌گاه ab عددی زوج است.
۲) اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آن‌گاه ab عددی فرد است.
۳) اگر $a+b$ عددی فرد باشد، آن‌گاه ab عددی فرد است.
۴) اگر $a+b$ عددی فرد باشد، آن‌گاه ab عددی زوج است.

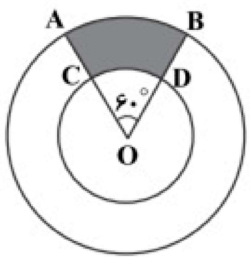
۴۵ α و β دو عدد گنگ و $۲\alpha+۶\beta$ گویا می‌باشد. اگر $۵\alpha+m\beta$ گویا باشد، m کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۵

۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: بین اندازه‌ی یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه‌ی زیر برقرار است: $\theta = \frac{l}{r}$

در دایره‌ی بزرگ‌تر می‌توان نوشت:



$$\text{AB طول کمان} = ۹ \times \frac{\pi}{۳} = ۳\pi$$

در دایره‌ی کوچک‌تر داریم:

$$\text{CD طول کمان} = ۶ \times \frac{\pi}{۳} = ۲\pi$$

$$\text{AC} = \text{BD} = ۹ - ۶ = ۳$$

بنابراین محیط ناحیه‌ی رنگی برابر است با:

$$۳\pi + ۲\pi + ۲ \times ۳ = ۶ + ۵\pi$$

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

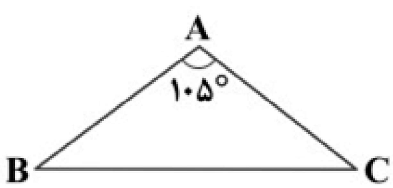
نکته: اگر D اندازه‌ی زاویه‌ی α برحسب درجه و R اندازه‌ی آن برحسب رادیان باشد، آنگاه: $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$

ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۱۲}$ رادیان را برحسب درجه پیدا می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۷\pi}{۱۲}}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow D = \frac{۷}{۱۲} \times ۱۸۰^\circ = ۷ \times ۱۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

زاویه‌ی موردنظر بزرگ‌تر از ۹۰° است، پس نمی‌تواند یکی از زوایای مجاور به قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین باشد، یعنی حتماً زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین است.

اکنون با توجه به اینکه دو زاویه‌ی دیگر مثلث برابرند و مجموع زوایای مثلث برابر ۱۸۰° است، داریم:



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰۵^\circ + ۲\widehat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\widehat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۳۷/۵^\circ$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکتهٔ ۱: همواره بین اندازهٔ یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان روبه‌رو به آن (l) در یک دایره به شعاع r، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\theta = \frac{l}{r}$$

نکتهٔ ۲: برای تبدیل اندازهٔ یک زاویه از رادیان به درجه، کافی است اندازهٔ زاویه را در $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب کنیم.

با توجه به نکتهٔ ۱، ابتدا بررسی می‌کنیم چه طولی از تسمه حرکت کرده است:

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta \Rightarrow l = \frac{R}{۴} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi R}{۸}$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم وصل می‌شوند و تسمه به‌اندازهٔ $\frac{\pi R}{۸}$ حرکت کرده است، پس قرقرهٔ بزرگ‌تر هم به‌اندازهٔ $\frac{\pi R}{۸}$ می‌چرخد.

حال به کمک نکتهٔ ۱، اندازهٔ زاویه‌ای که دایرهٔ بزرگ‌تر حرکت کرده را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi R}{۸}}{R} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۸}$$

به کمک نکتهٔ ۲، اندازهٔ زاویه را برحسب درجه به‌دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{\pi}{۸} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸۰}{۸} = ۲۲/۵$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

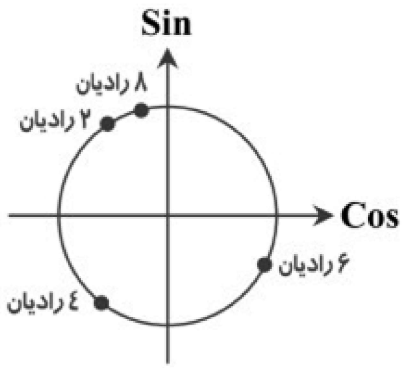
نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع به‌صورت زیر است:

ربع / نسبت مثلثاتی	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

راه حل اول:

نکته: هر یک رادیان تقریباً معادل ۵۷ درجه است.

هریک از زاویه‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ رادیان را به‌صورت تقریبی به درجه تبدیل می‌کنیم و در دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم:



$$2^{rad} \simeq 2 \times 57^\circ = 114^\circ \qquad 4^{rad} \simeq 4 \times 57^\circ = 228^\circ$$

$$6^{rad} \simeq 6 \times 57^\circ = 342^\circ \qquad 8^{rad} \simeq 8 \times 57^\circ = 456^\circ$$

با توجه به شکل مقابل، مقادیر Cos ۲، Cos ۴ و Cos ۸ منفی هستند و فقط مقدار Cos ۶ مثبت است.

پس مقدار Cos ۶ از بقیهٔ اعداد بزرگ‌تر است.

راه حل دوم:

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow 2^{rad}$ در ربع دوم است $\Rightarrow$ Cos ۲ منفی است.

$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 4^{rad}$ در ربع سوم است $\Rightarrow$ Cos ۴ منفی است.

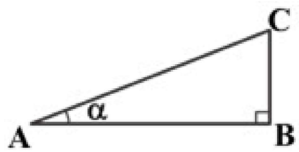
$\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow 6^{rad}$ در ربع چهارم است $\Rightarrow$ Cos ۶ مثبت است.

$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi \Rightarrow 8^{rad}$ در ربع دوم است $\Rightarrow$ Cos ۸ منفی است.

بنابراین Cos ۶ از بقیه بزرگ‌تر است.

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$\tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB}$$

مطابق نکته در مثلث داده‌شده می‌توان نوشت:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{AB} \Rightarrow AB = ۱$$

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°, ۴۵° و ۶۰° به‌صورت زیر است:

θ	۳۰°	۴۵°	۶۰°	θ	۳۰°	۴۵°	۶۰°
Sinθ	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	tanθ	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
Cosθ	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	Cotθ	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۶۰° داریم: $\frac{\text{Sin}\,۶۰^\circ}{\cot ۶۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳}{۲}$

۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° به‌صورت زیر است:

θ	۳۰°	۴۵°	۶۰°
Sinθ	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
Cosθ	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tanθ	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
Cotθ	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{۲\,\text{Sin}\,۳۰^\circ\,\text{Cos}\,۳۰^\circ}{۱-\text{Cos}\,۶۰^\circ} = \frac{۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲\,\text{Sin}\,۳۰^\circ\,\text{Cos}\,۳۰^\circ}{۱-\text{Cos}\,۶۰^\circ} = \cot ۳۰^\circ$$

۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه x ، داریم: $-۱ \leqslant \text{Sin}\,x \leqslant ۱$

برای محاسبهٔ بیشترین مقدار A ، ابتدا بیشترین مقدار جملهٔ $-۳\,\text{Sin}\,x$ را تعیین می‌کنیم، از آنجایی که ضریب $\text{Sin}\,x$ منفی است، لذا به‌ازای $\text{Sin}\,x = -۱$ بیشترین مقدار عبارت A حاصل می‌شود. داریم:

$$\text{بیشترین مقدار A} : ۸ \Rightarrow (۲a+۱) - ۳x(-۱) = ۸ \Rightarrow ۲a+۱+۳ = ۸ \Rightarrow ۲a+۴ = ۸ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف به‌صورت زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sinx	+	+	−	−
Cosx	+	−	−	+
tan x	+	−	+	−
Cotx	+	−	+	−

بنابر نکته‌ی بالا، وقتی حاصل‌ضرب $\operatorname{Sin}\alpha$ در $\operatorname{Cos}\alpha$ منفی است که α در ناحیه‌ی دوم یا چهارم باشد، از طرفی داریم:

$$\tan\alpha < \cot\alpha \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} < \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

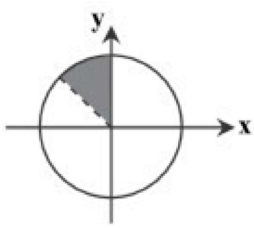
راه حل اول:

طرفین نامساوی را در $\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha$ ضرب می‌کنیم. مطابق فرض، این مقدار منفی است و جهت نامساوی تغییر می‌کند.

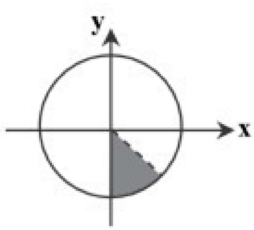
$$\operatorname{Sin}^{۲}\alpha > \operatorname{Cos}^{۲}\alpha \xrightarrow[\operatorname{Cos}^{۲}\alpha>۰]{\text{طرفین تقسیم بر}} \tan^{۲}\alpha > ۱$$

در ناحیه‌ی دوم و چهارم مقدار $\tan\alpha$ منفی است. بنابراین می‌توان نوشت:

در ناحیه‌ی دوم مقدار $\tan\alpha$ زمانی کوچک‌تر از ۱- است که مقدار عددی سینوس از مقدار عددی کسینوس بیشتر باشد، یعنی:



در ناحیه‌ی چهارم نیز مقدار $\tan\alpha$ زمانی کوچک‌تر از ۱- است که مقدار عددی سینوس از مقدار عددی کسینوس بیشتر باشد، یعنی:



بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

راه حل دوم:

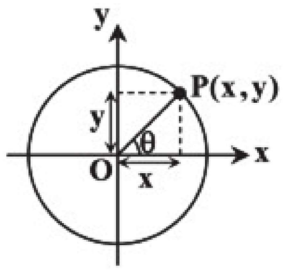
$$\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} < \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} - \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} < ۰ \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}^{۲}\alpha - \operatorname{Cos}^{۲}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\alpha} < ۰$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\alpha<۰} \operatorname{Sin}^{۲}\alpha - \operatorname{Cos}^{۲}\alpha > ۰ \Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}\alpha > \operatorname{Cos}^{۲}\alpha$$

ادامه‌ی راه‌حل مشابه است.

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته باشد، مطابق شکل داریم:



$$\text{Sin}\,\theta = y$$
$$\text{Cos}\,\theta = x$$
$$x^۲ + y^۲ = ۱$$

نقطهٔ $P\left(x, \frac{۲}{۵}\right)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس:

$$x^۲ + \left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ - \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow x^۲ = \frac{۲۱}{۲۵} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

$P\left(x, \frac{۲}{۵}\right)$ نقطه‌ای در ناحیهٔ دوم است، پس x حتماً مقداری منفی است، در نتیجه: $x = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$

بنابراین: $$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}}{\frac{۲}{۵}} = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۱}$$

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت A را برحسب زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم:

$$A = \frac{۲\text{Sin}(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) + ۳\text{Sin}(۳۶۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\text{Cos}\,(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) - ۴\text{Cos}(۴۵۰^\circ - ۲۰^\circ)} = \frac{-۲\text{Cos}۲۰^\circ - ۳\text{Sin}۲۰^\circ}{-\text{Cos}۲۰^\circ - ۴\text{Sin}۲۰^\circ}$$

حال با تقسیم صورت و مخرج عبارت بالابر $-\text{Cos}۲۰^\circ$ خواهیم داشت:

$$A = \frac{۲ + ۳\tan ۲۰^\circ}{۱ + ۴\tan ۲۰^\circ} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{۲ + ۳(۰/۴)}{۱ + ۴(۰/۴)} = \frac{۳/۲}{۲/۶} = \frac{۱۶}{۱۳}$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\text{Cos}^۲\alpha}$ و $\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha}$

ابتدا مقادیر $\cot\alpha$ و $\text{Cos}\,\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \cot\alpha = \frac{۱}{۲} \\ ۱ + ۲^۲ = \frac{۱}{\text{Cos}^۲\alpha} \Rightarrow \text{Cos}^۲\alpha = \frac{۱}{۵} \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر بالا در A داریم: $$A = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۵}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۳\times۵}{۶\times۲} = \frac{۵}{۴}$$

۱۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\text{Cos}^2\theta}$

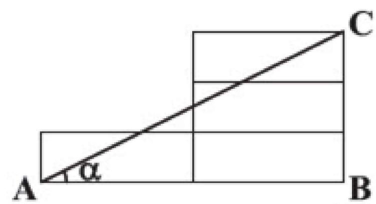
نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

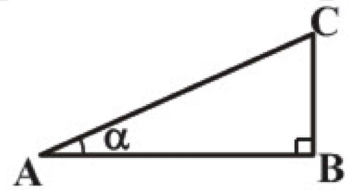
$$\tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB}$$

در مثلث ABC داریم:

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\alpha} = ۱ + \tan^{۲}\alpha = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = \frac{۴}{۵}$$





۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{۱+\text{tg}^{۲}x}}\left(\frac{۱}{\text{Sin}\,x} - \text{Sin}\,x\right) = \frac{\frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}}{\sqrt{\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x}}}\left(\frac{۱-\text{Sin}^{۲}x}{\text{Sin}\,x}\right)$$

$$= \frac{\cancel{\text{Sin}\,x}}{\text{Cos}\,x} \times \overset{-\text{Cos}\,x}{\cancel{|\text{Cos}\,x|}}\left(\frac{\text{Cos}^{۲}x}{\cancel{\text{Sin}\,x}}\right) = -\text{Cos}^{۲}x$$

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{۱+\text{tg}^{۲}x}\left(۲\,\text{Sin}^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}\right) - \text{Sin}^{۲}x\right) = \sqrt{\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x}}(۱-\text{Sin}^{۲}x) = \frac{۱}{|\text{Cos}\,x|}\text{Cos}^{۲}x$$

$$= |\text{Cos}\,x| \xrightarrow{\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}} -\text{Cos}\,x$$

۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۴-۳}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow B = \frac{۱}{۶-۵}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} + B = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۸ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-۱}+B)^{-۱} = \frac{۱}{۲۰-۱۶}\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۸ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{حاصل جمع درایه‌های غیرقطر اصلی} = \frac{۵}{۲}$$

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ماتریس‌های $\mathrm{kA}+I, ۳\mathrm{A}+I$، وارون یک‌دیگرند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ماتریس همانی است.

$$(\mathrm{kA}+I)(۳\mathrm{A}+I)=I \Rightarrow ۳\mathrm{kA}^۲+\mathrm{kA}+۳\mathrm{A}+I=I \xrightarrow{A^۲=۳\mathrm{A}}$$

$$۹\mathrm{kA}+\mathrm{kA}+۳\mathrm{A}=\overline{O} \Rightarrow (۱۰\mathrm{k}+۳)\,A=\overline{O} \xrightarrow{A\neq\overline{O}} ۱۰\mathrm{k}+۳=۰ \Rightarrow k=-\frac{۳}{۱۰}$$

۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$|A|=۴۵ \Rightarrow \left|\frac{۱}{۴۵}A^۵\right|=\left(\frac{۱}{۴۵}\right)^۲\times ۴۵^۵=۴۵^۳$$

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$I=\begin{bmatrix} ۴^{x-y} & ۰ \\ x+y+z & ۵^{x-۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=۰ \Rightarrow x=y \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x+y+z=۰ \Rightarrow z=-۸ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۴ & -۸ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۴ & -۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۴ & -۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲ & ۴ \\ -۱۶ & ۶۰ \end{bmatrix}$$

حاصل جمع درایه‌ها $=۱۲+۴-۱۶+۶۰=۶۰$

۲۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون A ماتریس وارون‌پذیر است پس $|A|\neq ۰$ و داریم:

$$|A|=k(-k+۲)-۱=-k^۲+۲\mathrm{k}-۱=-(k-۱)^۲\neq ۰ \Rightarrow k\neq ۱$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-(k-۱)^۲}\begin{bmatrix} -k+۲ & -۱ \\ -۱ & k \end{bmatrix}, k\neq ۱$$

$$\Rightarrow A^{-۱} \text{ مجموع درایه های } = \frac{-۱}{(k-۱)^۲}\times\underbrace{(k+(-k+۲)+(-۱)+(-۱))}_{۰}=۰$$

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $B=\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}$ معادله مفروض به صورت $\mathrm{BAC}=D$ خواهد بود. برای یافتن ماتریس A طرفین این معادله را از راست در C^{-1} و از چپ در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow (B^{-۱}\ B)\ A(\mathrm{CC}^{-۱})=B^{-۱}\ \mathrm{DC}^{-۱}\xrightarrow{\mathrm{IA}=\mathrm{AI}=A} A=B^{-۱}\ \mathrm{DC}^{-۱}$$

$$C=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}\Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{۵-۶}\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲}&\frac{۳}{۲}\\۱&-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲}&\frac{۳}{۲}\\۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-۳&۳\\\cdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲&-۲۱\\\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

۲۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر وارون هر ماتریس به نام A را به فرم $A^{-۱}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$A^{-۱}\times A=A\times A^{-۱}=I$$

پس داریم:

$$A^{۳}+A^{۲}+A+I=\bar{o}\Rightarrow A^{۳}+A^{۲}+A=-I\Rightarrow A(A^{۲}+A+I)=-I$$

$$A(-A^{۲}-A-I)=I$$

با توجه به این که $A^{۳}=-A^{۲}-A-I$ پس $\mathrm{AA}^{۳}=I$ بنابراین وارون ماتریس A، ماتریس $A^{۳}$ است.

۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ماتریس $A^{۲}-A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$$

حال برای محاسبه وارون هر ماتریس به فرم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ از رابطه‌ی $\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ استفاده می‌کنیم.

$$\left|A^{۲}-A\right|=۱\Rightarrow (A^{۲}-A)^{-۱}=\frac{۱}{۱}\times\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$$

۲۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x=[۲\ \ -۱\ \ ۵]\begin{bmatrix}-۱\\-۲\\۳\end{bmatrix}=-۲+۲+۱۵=۱۵$$

$$y=[۱\ \ -۲]\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}=۲+۶=۸$$

$$\Rightarrow \mathrm{xy}=۸\times۱۵=۱۲۰$$

۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $|A|=\cdot$ باشد، وارون A وجود ندارد.

$$|A| = m^{۳} - ۴m = \cdot \Rightarrow m(m^{۲}-۴) = \cdot \Rightarrow \begin{cases} m=\cdot \\ m=۲ \\ m=-۲ \end{cases}$$

مجموع مقادیر m برابر صفر است.

۲۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مفهوم سؤال این است که ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۳ & a \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{a+۲}{۳} \\ \cdot & b \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & a \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & -a \\ \cdot & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{a}{۳} \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{a+۲}{۳} \\ \cdot & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{۳} = \frac{a+۲}{۳} \Rightarrow a+۲ = -a \Rightarrow a = -۱ \\ b = ۱ \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{-۱+۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فرض شود و عناصر قطر اصلی را در k ضرب کنیم و درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم را $k^{۲}$ برابر کنیم، آن‌گاه ماتریس $B = \begin{bmatrix} ka & k^{۲}b \\ c & kd \end{bmatrix}$ به دست می‌آید که $|B| = k^{۲}\,|A|$ خواهد بود.

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهاده‌ی ماتریس A) ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$AA^T = \begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{۲}+۱۰ & a+۲ \\ a+۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$AA^TB = ۵۲I \Rightarrow |AA^TB| = |۵۲I| \Rightarrow |AA^T|\,|B| = ۵۲^{۲}\times ۱ \Rightarrow \left[۳(a^{۲}+۱۰) - (a+۲)^{۲}\right]\times ۱۰۴$$

$$= ۵۲^{۲} \Rightarrow ۳a^{۲} + ۳۰ - a^{۲} - ۴a - ۴ = ۲۶ \Rightarrow ۲a^{۲} - ۴a = \cdot \Rightarrow ۲a(a-۲) = \cdot \Rightarrow \begin{cases} a = \cdot \\ a = ۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a، برابر ۲ است.

۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آن‌را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_۱ - ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵b_۱ - ۲b_۲ = ۴b_۱ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_۱ = ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases} \xrightarrow{b_۱ = ۲b_۲} ۸b_۲ + ab_۲ = ۴b_۲ \Rightarrow a = -۴$$

۳۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت

برای به دست آوردن سطر سوم ماتریس A کافیست سطر سوم ماتریس BC را پیدا کرده در ماتریس D ضرب کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ۳ & ۷ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ۷ & ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطح سوم ماتریس A برابر $۷ + ۱ - ۵ = ۳$ است.

۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. استدلال به کار رفته در گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) از نوع مغالطه است که روش به کار رفته در آن نادرست است، اما نتیجه‌ی آن ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد، ولی در گزینه‌ی (۱) استدلال به کار رفته از نوع قیاس استثنایی است و روش به کار رفته و نتیجه آن همواره درست است.

۳۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در استدلال گزینه‌ی ۱ باید به صورت زیر بنویسیم:

$$a^{۲} < b^{۲} \Rightarrow |a| < |b| \Rightarrow ۲\,|a| < ۲\,|b|$$

برای مقادیر $a = ۱$ و $b = -۲$، استدلال گزینه‌ی ۱ نادرست است.

سایر استدلال‌ها درست هستند.

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} a|۱۱k+۴ \\ a|۷k-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a|۷(۱۱k+۴) - ۱۱(۷k-۱) \rightarrow a|۳۹ \xrightarrow{\text{اول است } a} a_{\max} = ۱۳$$

به ازای $k = ۲$ مقدار $a = ۱۳$ به دست می‌آید.

۳۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این گزاره را به روش بازگشتی اثابت می‌کنیم:

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \overset{a>۰}{\Leftrightarrow} a^{۲} + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^{۲} - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^{۲} \geq ۰$$

چون نامساوی آخر همواره درست است و روابط بازگشت‌پذیرند در نتیجه درستی گزاره‌ی فوق اثبات می‌شود.

۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن سه گزاره به ترتیب مثال نقض‌های ۱۲۰، ۱۸ و ۲۱ وجود دارد.

۳۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$k = ۲L,\ k^{۳} - ۴k = k(k-۲)(k+۲) = ۸(L-۱)L(L+۱)$$

چون $(L-۱)\times L\times(L+۱)$ بر $۶ = ۳!$ بخش‌پذیرند، پس $k^{۳} - ۴k$ بر $۴۸ = ۸\times۶$ بخش‌پذیر است.

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. این عبارت همواره زوج است. اگر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ هر سه زوج یا فرد باشند، تفاضل دو به دوی آن‌ها زوج است. اگر دو تا فرد و یکی زوج و یا دو تا زوج و یکی فرد باشد، به هر ترتیبی بچینیم، تفاضل دو تا زوج می‌شود. پس حاصل‌ضرب همواره زوج است.

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $a - b$ زوج است، پس a و b هر دو زوج یا هر دو فرد هستند.

گزینۀ (۲) نادست است، زیرا در حالتی‌که a و b فرد هستند، آنگاه $۲a - b$ عددی فرد است.

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) درست است.

۲) درست است.

۳) درست است. با استدلال استنتاجی اثبات می‌شود.

۴) نادرست است. مثال نقض آن $n = ۱۷$ است، زیرا:

$$n^۳ + n^۲ + ۱۷ \overset{n=۱۷}{\equiv} ۱۷(۱۷^۲ + ۱۷ + ۱) = ۱۷\text{k}$$

یعنی بر ۱۷ بخش‌پذیر است، پس اول نیست.

۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$۱۷ = ۹ + ۴ + ۴$

$۱۸ = ۱۶ + ۱ + ۱$

$۱۱ = ۹ + ۱ + ۱$

فقط گزینه‌ی (۴) را نمی‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت.

۴۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

همیشه درست $\quad$ $۱)\ a^۲ + b^۲ + \text{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{۲}\right)^۲ + \frac{۳\text{b}^۲}{۴} \geq ۰$

$$۲)\ a^۲ + b^۲ + \text{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow ۲\text{a}^۲ + ۲\text{b}^۲ + ۲\text{ab} \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ ۲\text{ab} + a^۲ + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow (a + b)^۲ + a^۲ + b^۲ \geq ۰$$

همیشه درست $\quad$ $۳)\ a^۲ + b^۲ + \text{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow \left(b + \frac{a}{۲}\right)^۲ + \frac{۳\text{a}^۲}{۴} \geq ۰$

۴) $\quad (a + b)^۲ + ۲\text{a}^۲ + ۲\text{b}^۲ = ۳a^۲ + ۳b^۲ + ۲\text{ab} \rightarrow$ حکم را نمی‌دهد

پس فقط گزینه‌ی (۴) هم‌ارز حکم نیست.

۴۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر گزاره‌ی مرکب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، گزاره‌های p و q هم‌ارز هستند.

نکته: برای اثبات درستی یک گزاره، گزاره‌های هم‌ارز با آن را در نظر می‌گیریم و به کمک قوانین ریاضی به گزاره‌ی اصلی می‌رسیم. معمولاً این کار به جهت ساده‌تر شدن اثبات استفاده می‌شود که به آن روش بازگشتی می‌گوییم. در روش بازگشتی، خودِ عبارت حکم را ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درستِ هم‌ارز با آن برسیم و در این صورت همه‌ی مراحل بازگشت‌پذیر هستند. با توجه به نکته‌ی بالا برای عبارت صورتِ سؤال داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant ۲ \underset{\text{xy}>۰}{\overset{\times \text{xy}}{\rightleftarrows}} x^۲ + y^۲ \geqslant ۲xy \Leftrightarrow x^۲ - ۲xy + y^۲ \geqslant ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ \geqslant ۰$$

پس گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عکس قضیه‌ی شرطی $a > ۱ \Rightarrow a^۲ > ۱$ برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $a = -۲$ باشد، آن‌گاه $a^۲ > ۱$ و $a < ۱$ است.

۴۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $a + b$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a و b یا هر دو زوج هستند که در این صورت ab عددی زوج است و یا هر دو فرد هستند که در این صورت ab عددی فرد است ولی در صورتی که $a + b$ عددی فرد باشد، آن‌گاه از بین a و b یکی زوج و دیگری فرد است که در این صورت ab قطعاً عددی زوج می‌باشد.

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۵\alpha + m\beta = \frac{۵}{۲}(۲\alpha) + m\beta = \frac{۵}{۲}(۲\alpha + ۶\beta - ۶\beta) + m\beta$$

$$\Rightarrow \underbrace{۵\alpha + m\beta}_{\text{گویا}} = \underbrace{\frac{۵}{۲}(۲\alpha + ۶\beta)}_{\text{گویا}} + (m - ۱۵)\beta$$

پس $(m-۱۵)\beta$ عدد گویا است و چون β گنگ است، پس $m = ۱۵$ می‌باشد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	**۳**	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۱۹	۱	۲	**۳**	۴
۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	**۴**
۲۲	**۱**	۲	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	**۱**	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	**۳**	۴
۲۸	۱	۲	۳	**۴**
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	**۱**	۲	۳	۴
۳۱	**۱**	۲	۳	۴
۳۲	**۱**	۲	۳	۴
۳۳	۱	**۲**	۳	۴
۳۴	۱	۲	**۳**	۴
۳۵	۱	۲	۳	**۴**
۳۶	۱	۲	**۳**	۴
۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	**۴**
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۱	۱	۲	۳	**۴**
۴۲	**۱**	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	۳	**۴**
۴۵	۱	۲	۳	**۴**