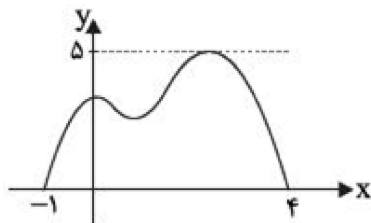




۱ اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه $f(\sqrt{x})$ کدام است؟

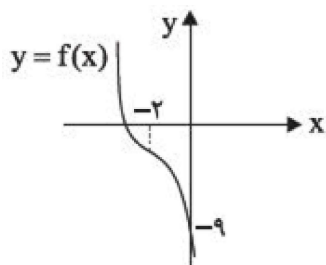


- ۱ $[-2, 2]$
 ۲ $[0, 2]$
 ۳ $[0, 25]$
 ۴ $[0, 16]$

۲ تابع $f = \{(-1, a), (2, 3), (3, 6)\}$ و $g = \{(-2, -1), (1, 4), (2, 2), (-4, 3)\}$ مفروض اند. اگر fog نزولی باشد، قدرمطلق تفاضل کمترین و بیشترین مقدار a کدام است؟

- ۱ ۲
 ۲ ۲/۵
 ۳ ۳
 ۴ ۴/۵

۳ تابع $f(x)$ از انتقال افقی و عمودی $y = -x^3$ رسم شده است، در این صورت $f(1)$ کدام است؟



- ۱ -۱۲
 ۲ -۱۸
 ۳ -۲۴
 ۴ -۲۸

۴ اگر تابع $f(x) = (2x^r - 1)^r + mx^r(x^r + 1)^n$ از درجه ی ۷ باشد، آنگاه مقدار تابع به ازای $x = 1$ چقدر است؟

- ۱ ۸۷
 ۲ ۷۸
 ۳ -۷۸
 ۴ -۸۷

۵ هرگاه باقی مانده ی $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + 2bx$ بر $x - a$ برابر $-b$ باشد، با فرض $b \neq 0$ مقدار a کدام است؟

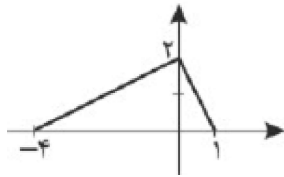
- ۱ ۲
 ۲ -۲
 ۳ ۱
 ۴ -۱

۶ باقی مانده ی تقسیم چندجمله ای $f(x) + x$ بر $x + 2$ و $x - 1$ برابر ۲ و -۱ است. باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 2$ کدام است؟

- ۱ $x + 6$
 ۲ $x - 3$
 ۳ $-2x$
 ۴ $2x$



۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. تابع $y = f(-2 - 2x)$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟



- ۱ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ۲ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ۳ $[-1, 2]$ ۴ $[-1, 1]$

۸ تابع $f(x) = |2^{x+1} - 1|$ در فاصله‌ی $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۲ ۳ -۱ ۴ صفر

۹ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 4 \\ ax + x + 2 & 4 < x < 5 \\ b - 1 & x \geq 5 \end{cases}$ در بازه‌ی $(4, +\infty)$ ثابت باشد، $a + b$ چقدر است؟

- ۱ ۳ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

۱۰ نمودار وارون تابع $y = (x + 1)^x + 1$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

- ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم

۱۱ اگر برد تابع f بازه‌ی $R_f = [-\sqrt{5}, 1]$ باشد، برد تابع $g(x) = -\sqrt{2}f(x+1) - 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ ۵ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۲ باقی‌مانده‌ی چندجمله‌ای $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ بر $x - a$ برابر ۲ و بر $x - b$ برابر ۱۴ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

۱۳ حاصل عبارت $\frac{x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$ به ازای $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳ ۱ ۴ $2\sqrt{2}$

۱۴ فرض کنید $1 = \text{Log} \frac{(3x-2)}{5} \left| \begin{matrix} \text{Log } 5 & \text{Log } 2 \\ \text{Log } 2 & \text{Log } 5 \end{matrix} \right|$ ، مقدار x کدام است؟

- ۱ ۹ ۲ $\frac{17}{3}$ ۳ ۴ ۴ $\frac{7}{3}$

۱۵ جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- ۱ ۱، -۴ ۲ ۱، ۴ ۳ ۱، ۵ ۴ ۲، ۵

۱۶ اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A|A$ ، کدام است؟

- ۱ ۶۴ ۲ ۹۶ ۳ ۱۲۸ ۴ ۲۵۶



۱۷) اگر $AI = 5I$ باشد، $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & . \end{bmatrix}$ و $|5A|$ ، کدام است؟

- ۱) ۲۵ ۲) -۲۵ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، سطر i ام را در 2^i و ستون j ام را در 3^j ضرب کنیم، دترمینان ماتریس حاصل، چند برابر دترمینان ماتریس A خواهد بود؟

- ۱) ۶ ۲) 6^2 ۳) 6^3 ۴) 6^6

۱۹) اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = x + 2 \begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 5 \end{vmatrix}$ ، کدام است؟

- ۱) -۲۵ ۲) ۲۵ ۳) -۱۲۵ ۴) ۱۲۵

۲۰) اگر α و β ، ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ 2\beta & \alpha \end{vmatrix}$ کدام است؟

- ۱) -۲۴ ۲) صفر ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۲۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3I$ دترمینان $\left| \frac{A^5}{45} \right|$ کدام است؟

- ۱) 45^4 ۲) 45^3 ۳) 45^2 ۴) ۴۵

۲۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان $(A^{-1})^3$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{125}$ ۲) $-\frac{1}{125}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $-\frac{1}{25}$

۲۳) اگر در یک ماتریس 2×2 درایه‌های روی قطر اصلی را k برابر و درایه‌ی a_{11} را k^2 برابر کنیم، دترمینان ماتریس چند برابر می‌شود؟

- ۱) k ۲) k^2 ۳) k^3 ۴) ۱

۲۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $-\frac{1}{2} A^T B^T$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۵) مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\cos 4\theta}{\sin \theta}$ ۲) $\frac{\sin \theta}{\sin 4\theta}$ ۳) $\frac{\sin \theta}{\cos 4\theta}$ ۴) $\frac{\sin 4\theta}{\sin \theta}$



۲۶ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و دترمینان ماتریس $|A|$ برابر $|A|^r$ باشد، حاصل $|rA|$ برابر کدام است؟

- ۱ $|A|$ ۲ $|A|^r$ ۳ $|A|^{r+1}$ ۴ $|A|^{r+1}$

۲۷ نمایش ریاضی عبارت توصیفی «مجموع حاصل ضرب دو عدد طبیعی با یکی از آن دو عدد را سه برابر کرده و از نصف حاصل، مربع عدد دیگر را کسر نموده‌ایم. حاصل، مجذور تفاضل دو عدد شده است.» کدام است؟

۱ $\frac{r(xy+x)}{2} - y^r = (x-y)^r$ ۲ $\frac{r \text{ Function } xy+x}{2} - y^r = \sqrt{y-x}$

۳ $\frac{r \text{ Function } xy+x}{2} - \frac{y^r}{2} = (x-y)^r$ ۴ $rxy+x - \left(\frac{y}{2}\right)^r = \sqrt{x^r - y^r}$

۲۸ از کدام گزینه می‌توان همواره تساوی a و b را نتیجه گرفت؟

- ۱ $a^r = b^r$ ۲ $a^r = ab$ ۳ $a - c = b - c$ ۴ $ac = bc$

۲۹ کدام گزینه نقیض گزاره‌ی مقابل را به درستی مشخص می‌کند؟ «اگر تقلب کنید، آن‌گاه تنبیه می‌شوید.»

- ۱ اگر تقلب نکنید، آن‌گاه تنبیه نمی‌شوید. ۲ تقلب می‌کنید و تنبیه نمی‌شوید.
۳ اگر تنبیه نشوید، آن‌گاه تقلب نمی‌کنید. ۴ تقلب نمی‌کنید و تنبیه می‌شوید.

۳۰ رابطه‌ی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ به‌ازای چند زوج مرتب (a, b) برقرار است؟

$(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0)$

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ بی‌شمار ۴ صفر

۳۱ کدامیک از گزاره‌های زیر مثال نقض ندارد؟

- ۱ اگر $2^n - 1$ عددی اول باشد آن‌گاه n عددی اول است.
۲ برای هر عدد حقیقی x نابرابری $x \leq x^r$ برقرار است.
۳ برای هر عدد حقیقی مثبت x ، نابرابری $x \leq x^r$ برقرار است.
۴ اگر $2^n + 1$ عددی اول باشد آن‌گاه n عددی زوج است.

۳۲ می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^r فرد باشد، n نیز عددی فرد است. در این صورت باید چه فرضی را لحاظ کنیم؟

- ۱ n^r زوج است. ۲ n^r فرد است. ۳ n فرد است. ۴ n زوج است.

۳۳ برای اثبات یا رد حکم «مجموع دو عدد گنگ، همواره گنگ است» کدام گزینه مناسب است؟

- ۱ به روش درنظرگرفتن همه‌ی حالت‌ها اثبات می‌شود. ۲ به روش برهان خلف اثبات می‌شود.
۳ به روش برهان خلف رد می‌شود. ۴ به روش پیدا کردن مثال نقض رد می‌شود.

۳۴ اگر α عددی گویا و β عددی گنگ باشد، کدام عبارت همواره گنگ است؟

- ۱ $\alpha\beta$ ۲ $\alpha + \beta$ ۳ $\alpha + \beta^r$ ۴ $\sqrt{\alpha^r + \beta^r}$



۳۵ کدامیک از جملات زیر به کمک استدلال استنتاجی قابل اثبات نیست؟

۱ برای هر k فرد، مجموع هر k عدد متوالی بر k بخش پذیر است.

۲ عدد $1 + 2^{2^k}$ به ازاء همه عددهای طبیعی k ، عددی اول است.

۳ برای هر عدد طبیعی k ، $5k + 7 - k^2$ عددی فرد است.

۴ برای هر k طبیعی، حاصلضرب k عدد متوالی بر $k!$ بخش پذیر است.

۳۶ کدامیک از گزینه‌های زیر مثال نقض دارد؟

۱ اگر k حاصلضرب دو عدد متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

۲ اگر k مربع یک عدد فرد باشد، آنگاه $k - 1$ بر 8 بخش پذیر است.

۳ مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

۴ اگر k عدد گنگ باشد، آنگاه 2^k نیز عددی گنگ است.

۳۷ اگر x عددی گنگ باشد کدام عدد همواره گنگ است؟

۱ $x^2 + x$

۲ $[x] + x^2$

۳ $\frac{1}{x} - x$

۴ $\frac{1}{x} + [x]$

۳۸ کدام گزینه به روش مستقیم اثبات می‌شود؟

۱ حاصل جمع عددی گنگ با عددی گویا، عددی گنگ است.

۲ حاصلضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳ اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

۴ اگر x و y دو عدد گویا باشند، $x + y$ نیز گویا است.



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱

با توجه به شکل، دامنه $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ است. برای پیدا کردن دامنه $f(\sqrt{x})$ باید \sqrt{x} در فاصله $[-1, 4]$ باشد:

$$-1 \leq \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 16$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲

$$g = \{(-2, -1), (1, 4), (2, 2), (-4, 3)\}$$

$$f = \{(-1, a), (2, 3), (3, 6)\}$$

$$\text{fog} = \{(-2, a), (2, 3), (-4, 6)\} \rightarrow \text{نزولی}$$

$$(\text{fog})(-4) \geq (\text{fog})(-2) \geq (\text{fog})(2) \Rightarrow 6 \geq a \geq 3$$

$$\max(a) - \min(a) = 6 - 3 = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳

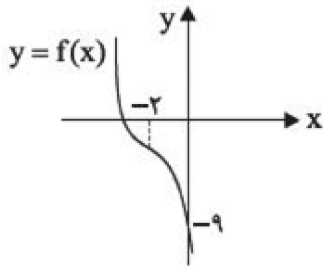
نمودار $f(x)$ نسبت به $y = -x^2$ دو واحد به چپ رفته است.

$$f(x) = -(x+2)^2 + c$$

به علاوه $f(0) = -9$ می‌باشد:

$$f(0) = -4 + c = -9 \Rightarrow c = -5$$

$$f(x) = -(x+2)^2 - 5 \Rightarrow f(1) = -(3)^2 - 5 = -14$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴

$$f(x) = (8x^9 - 12x^6 + 6x^3 - 1) + mx^2(x^2 + 1)^n + mn$$

پیرانتز اول درجه‌ی ۹ است، پس باید پیرانتز دوم هم از درجه‌ی نهم باشد و ضرایب آن‌ها قرینه شود تا با هم ساده شوند پس:

$$n = 3, m = -8 \Rightarrow f(x) = (2x^3 - 1)^3 - 8x^2(x^2 + 1)^3 - 24$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 - 8(2)^3 - 24 = 1 - 64 - 24 = -87$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵

$$f(a) = -b \Rightarrow a^2 - a^2 + a^2b + 2ab = -b$$

$$a^2b + 2ab + b = 0 \xrightarrow{b \neq 0} a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶

$$\begin{aligned}
 x + f(x) &= (x + 2)q(x) + 2 \\
 \Rightarrow x = -2: -2 + f(-2) &= 2 \Rightarrow f(-2) = 4 \\
 x + f(x) &= (x - 1)q_1(x) - 1 \\
 x = 1: 1 + f(1) &= -1 \Rightarrow f(1) = -2 \\
 f(x) &= (x^2 + x - 2)q_2(x) + \alpha x + \beta \\
 f(x) &= (x - 1)(x + 2)q_3(x) + \alpha x + \beta \\
 x = 1: f(1) &= \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = -2 \\
 x = -2: f(-2) &= -2\alpha + \beta \Rightarrow -2\alpha + \beta = 4 \\
 \alpha = -2, \beta &= 0 \Rightarrow r(x) = -2x
 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷

چون $-2 - 2x$ خود تابعی نزولی اکید است. باید $-2 - 2x$ در بازه‌ای که f اکیداً صعودی است، قرار بگیرد تا ترکیب به دست آمده از آنها اکیداً نزولی گردد.

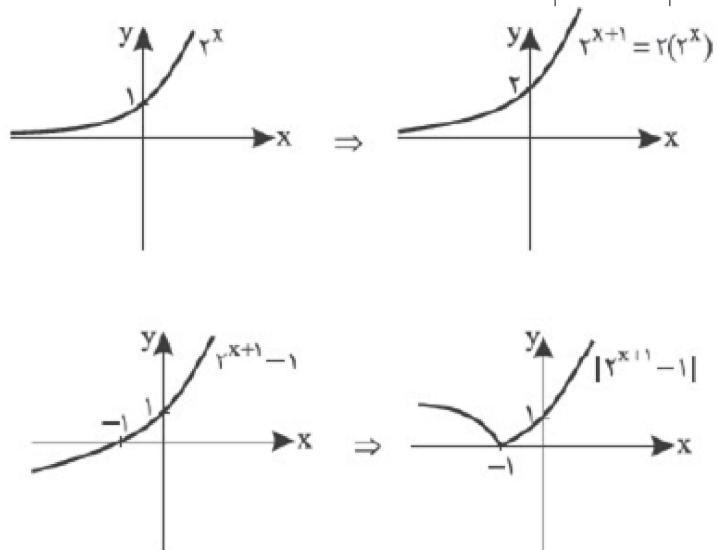
$$-4 \leq -2 - 2x \leq 0$$

$$0 \leq 2x + 2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

پس بازه‌ی موردنظر $[-1, 1]$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸

تابع $f(x) = |2^{x+1} - 1|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع $|2^{x+1} - 1|$ ، این تابع در بازه‌ی $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس حداقل مقدار a برابر -1 است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع در فاصله‌ی $(4, +\infty)$ ثابت است، پس در هر دو بازه $(4, 5)$ و $[5, +\infty)$ باید مقدار ثابت یکسان داشته باشد. ۹

$$ax + x + 2 = (a + 1)x + 2 = \text{ثابت} \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

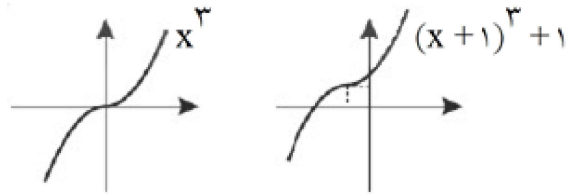
اگر $a = -1$ باشد، ضابطه‌ی دوم $y = 2$ است، پس باید ضابطه‌ی سوم نیز برابر 2 باشد.

$$b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$$

پس $a + b = 2$ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰



چون تابع از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند، پس وارون آن از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (یا انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود. ۱۱

$$R_f = [-\sqrt{5}, 1] \Rightarrow -\sqrt{5} \leq f(x) \leq 1 \xrightarrow[\text{تغییری در نمودار نمی‌کند}]{\text{در انتقال افقی}} -\sqrt{5} \leq f(x+1) \leq 1$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times(-\sqrt{2})} -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}f(x+1) \leq \sqrt{10} \rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq -\sqrt{2}f(x+1) - 3 \leq \sqrt{10} - 3 \\ \Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq g(x) \leq \sqrt{10} - 3 \Rightarrow R_g = [-\sqrt{2} - 3, \sqrt{10} - 3] \end{aligned}$$

تابع g شامل پنج عدد صحیح $-4, -3, -2, -1$ و صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$f(a) = 2 \Rightarrow a^r - a^r + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$f(b) = f(2) = 8 - 2a + 2 = 14 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$\frac{(x-1)(x^r + x^r + x^r + x^r + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^r + x + 1)(x^r - x + 1)} = \frac{x^r - 1}{(x^r - 1)(x^r + 1)} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \text{Log } 5 & \text{Log } 2 \\ \text{Log } 2 & \text{Log } 5 \end{array} \right| \text{Log } \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1 \\ \underbrace{(\text{Log } 5)^2 - (\text{Log } 2)^2}_{(\text{Log } 5 + \text{Log } 2)(\text{Log } 5 - \text{Log } 2)} \text{Log } \frac{5}{2} \\ \underbrace{\text{Log } 10}_{\text{Log } 10} \underbrace{\text{Log } \frac{5}{2}}_{\text{Log } \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Log } \frac{5}{2} \times \text{Log } \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1 \Rightarrow \cancel{\text{Log } \frac{5}{2}} \times \frac{\text{Log } (3x-2)}{\cancel{\text{Log } \frac{5}{2}}} = \text{Log } (3x-2) = 1 \Rightarrow 3x-2 = 10 \Rightarrow x = 4$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(6+x^2-5x=2) - 1(3-x-3) + 1(2-6+3x) = 0$$

$$\Rightarrow -16 - 4x^2 + 20x + x - 4 + 3x = 0 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } -4]{} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|A| |A| = |A|^T |A| = |A|^T = 4^T = 256$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، خواهیم داشت:

$$|AB| = |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow 5^2 |A| (-5)^2 = 5^2 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{25}$$

$$|5A| = 5^2 |A| = -1$$

نکته: اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k یک عدد حقیقی باشد:

$$|kA| = k^n |A|$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر سطری (ستونی) در k ضرب شود، دترمینان نیز در k ضرب می‌شود.

$$2 \times 3 \text{ ستون} \times 1 \text{ سطر}$$

$$2 \times 2 \text{ سطر} \times 2 \text{ ستون}$$

$$3 \times 3 \text{ ستون} \times 3 \text{ سطر}$$

بنابراین مقدار دترمینان A ، در عدد زیر ضرب خواهد شد:

$$2 \times 2^2 \times 2^3 \times 3^1 \times 3^2 \times 3^3 = 2^6 \times 3^6 = 6^6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-7) - 2(11) + 4(5) = -7 - 22 + 20 = -9$$

$$\Rightarrow x + 2 \begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -9 \Rightarrow x + 16 = -9 \Rightarrow x = -25$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25 & 0 \\ y & 5 \end{vmatrix} = -125$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & -\beta \\ 2\beta & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2(S^2 - 2P) = 2(4 + 4) = 24$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 45 \Rightarrow \left| \frac{1}{45} A^0 \right| = \left(\frac{1}{45} \right)^2 \times 45^0 = 45^{-2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان A را حساب می‌کنیم. در این مسئله دترمینان را به کمک روش ساروس محاسبه کرده‌ایم: ۲۲

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 0) - (9 + 4 + 0) = -5$$

$$\left| (A^{-1})^2 \right| = |A^{-1}|^2 = \left(\frac{1}{|A|} \right)^2 = \frac{1}{|A|^2} = -\frac{1}{125}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فرض شود و عناصر قطر اصلی را در k ضرب کنیم و درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم را k^2 برابر کنیم، آن‌گاه ماتریس $B = \begin{bmatrix} ka & k^2b \\ c & kd \end{bmatrix}$ به دست می‌آید که $|B| = k^2 |A|$ خواهد بود. ۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۴

ابتدا دترمینان دو ماتریس را حساب می‌کنیم. (بسط نسبت به ستون دوم چون تعداد صفرهای بیشتری دارد.)

$$|A| = (-1) \times (4 - 6) = 2 \quad |B| = 1 \times (8 - 9) = -1$$

$$\left| -\frac{1}{2} A^2 B^2 \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 |A|^2 |B|^2 = -\frac{1}{4} \times 2^2 \times (-1)^2 = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم. ۲۵

$$\text{دترمینان} = 2 \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 1) - (2 \cos \theta - 0) = 2 \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 2)$$

$$= 4 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = 4 \cos \theta \cos 2\theta = \frac{4 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$||A| A| = |A|^n |A| = |A|^{\frac{1}{n}} |A| \Rightarrow |A|^{n+1} = |A|^{\frac{1}{n}} |A| \Rightarrow n = 3$$

$$|2A| = 2^3 |A| = 8 |A|$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۷

مجموع حاصل ضرب دو عدد طبیعی با یکی از آن دو عدد را سه برابر کرده:

$$\frac{3(xy + x)}{2} \quad \text{نصف حاصل:}$$

$$\frac{3(xy + x)}{2} - y^2 \quad \text{مربع عدد دیگر را کسر نموده‌ایم:}$$

$$(x - y)^2 \quad \text{مجذور تفاضل دو عدد:}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها: ۲۸

۱) $a^x = b^x \Rightarrow a = \pm b((-x)^x = x^x, -x \neq x)$

۲) $a^x = ab \Rightarrow a = \cdot$ یا $a = b(a = \cdot, b = x \Rightarrow a^x = ab, a \neq b)$

۳) $a - c = b - c \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را با } c}$ $a - c + c = b - c + c \Rightarrow a = b$

۴) $ac = bc \Rightarrow c = \cdot$ یا $a = b(c = \cdot, a = 1, b = x \Rightarrow ac = bc, a \neq b)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا گزاره‌ها را نامگذاری می‌کنیم: ۲۹

اگر q قلب کنید، آن گاه p تنبیه می‌شوید.

حال با توجه به نامگذاری، نقیض گزاره را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم.

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

بیان فارسی این گزاره در گزینه‌ی (۲) مشاهده می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این تست را به روش بازگشتی حل می‌کنیم: ۳۰

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow (a+b)^x = ab$$

$$\Leftrightarrow a^x + xab + b^x = ab \Leftrightarrow a^x + ab + b^x = \cdot \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{x}\right)^x + \frac{x b^x}{x} = \cdot$$

رابطه‌ی آخر وقتی برقرار است که $b = \cdot$ و $a + \frac{b}{x} = \cdot$ باشد که با شرط مسأله ($b \neq \cdot$) در تناقض است. پس هیچ زوج مرتبی

برای (a, b) پیدا نمی‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۱

گزینه ۱ مثال نقض ندارد. چون اگر n مرکب بوده و به صورت $n = a \cdot b$ نوشته شود آن‌گاه $2^n - 1$ یعنی $2^{ab} - 1$ به صورت

$(2^a)^b - 1$ قابل نگارش است که به صورت $(2^a - 1) \times k$ قابل بازنویسی است که هم k و هم $2^a - 1$ بزرگ‌تر از ۱ بوده و

مرکب بودن آن‌را می‌رساند.

برای گزینه‌های ۲ و ۳ مثال نقض $x = \cdot / 1$ وجود دارد.

برای گزینه‌ی ۴ مثال نقض $n = 1$ وجود دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در استدلال به روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم مسئله نادرست است، پس باید فرض ۳۲

خلف، این باشد که n عددی فرد نیست، به عبارت دیگر فرض می‌کنیم n عددی زوج است (سپس نشان می‌دهیم که به تناقض

با فرض مسئله می‌رسیم.)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثال نقض $a = \sqrt{2}$ و $b = 1 - \sqrt{2}$ را در نظر بگیرید. ۳۳

$$a + b = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل جمع یک عدد گنگ با یک عدد گویا همواره گنگ است.

برای رد گزینه‌های دیگر:

عددی گویا است $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$

عددی گویا است $\beta = \sqrt{2}, \alpha = 1 \Rightarrow \alpha + \beta^2 = 1 + 2 = 3$

عددی گویا است $\beta = \sqrt{3}, \alpha = 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تنها گزینه ۲ قابل اثبات استنتاجی نیست.

برای هر $k, k = 2L + 1$ عدد متوالی را می‌توان به حالت $(n - L), \dots, (n - 1), n, (n + 1), \dots, (n + L)$ نشان داد که جمع آنها برابر nk و بر k بخش‌پذیر است.

برای اثبات گزینه ۳ داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = 2k^2 - 10k + 6 + 1 = 2L + 1 \quad n = 2k \quad \text{الف}$$

$$n^2 - 5n + 7 = 2k^2 - 12k + 13 = 2L + 1 \quad n = 2k - 1 \quad \text{ب}$$

و برای اثبات ۴ نیز می‌توانیم از استدلال استقرایی استفاده کنیم.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ مثال نقض ندارد.

گزینه ۲ مثال نقض ندارد.

$$4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

$$k = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 \Rightarrow k - 1 = 4n(n+1) | 8$$

تنها ۴ مثال نقض دارد. مثلاً $k = \text{Log}_2 3 = \text{Log}_2 3^{\text{Log}_2 2} = 2^{\text{Log}_2 3}$ عددی گنگ نیست.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 \text{ گزینه ی } 1 \quad x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{نقص گنگ بودن}} x = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$2 \text{ گزینه ی } 2 \quad \xrightarrow{\text{نقص گنگ بودن}} x = \sqrt{2}$$

$$3 \text{ گزینه ی } 3 \quad \xrightarrow{\text{نقص گنگ بودن}} d = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - x = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2 \text{ گویا}$$

$$4 \text{ گزینه ی } 4 \quad \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{[x]}{[x]} = \text{گنگ} \\ \text{عدد صحیح}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اثبات با استفاده از تعاریف، مفاهیم، اصول اولیه و قضایای شناخته شده را اثبات به روش مستقیم می‌گوییم.

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ در کتاب درسی به کمک برهان خلف اثبات شده‌اند، اما اثبات گزینه‌ی ۴ به روش مستقیم صورت می‌پذیرد:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ و } b \neq 0 \\ y = \frac{c}{d}; c, d \in \mathbb{Z} \text{ و } d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

چون $bd \neq 0, ad + bc, bd \in \mathbb{Z}$ پس $x + y$ عددی گویا است.



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴