پایه تحصیلی : دوازدهم ریاضی

زمان آزمون : ۷۰ دقیقه

نام آموزشگاه : دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ برگزاری ۱۴۰۱/۰۹/۰۸

۱) حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۳ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۳x + ۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

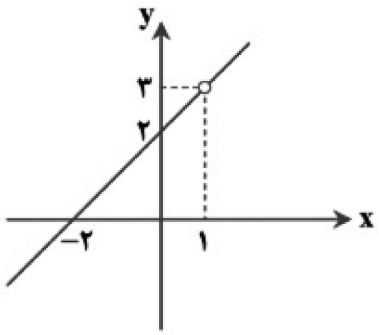
۲) اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲ - ۵x + b}{x^۲ - ۳x + ۲} = L$، مقدار $b + L$ کدام است؟ $(L \in \mathbb{R})$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۳) حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{\sqrt{۲x + ۵} - ۱}{۴ - x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴) شکل مقابل، نمودار تابع خطی $y = f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{(x + ۵)f(x)}{x^۲ - ۴}$ کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) صفر

۵) تابع $f(x) = \frac{(x + a)\,|x - ۴|}{x - ۴}$ در نقطهٔ $x = ۴$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) - ۸ ۳) ۸ ۴) ۴

۶) حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{x^۳ + x - ۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷) اگر $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3ax^2}=6$ ، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸) حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\cos x-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{3}$

۹) حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۵ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

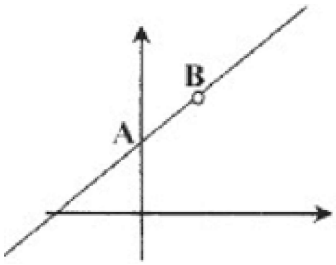
۱۰) اگر $\lim_{x\to -1}\frac{mx^3+3x+mx^2+3}{x^2-(2m-1)x-2m}=-1$ ، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۱) حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\cot 3x}{\cot 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۲) شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{3x^2+2x-16}{x-2}$ است. عرض دو نقطه‌ی A و B چه‌قدر اختلاف دارند؟

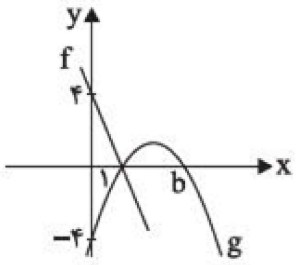


۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱۴ ۴) ۶

۱۳) اگر $f(x)=x^3+2x+m$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^3+x^2}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۴) با توجه به نمودارهای توابع خطی f و سهمی g، اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{g}{f} = -\frac{۱}{۲}$ باشد، b کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۵) حاصل $\lim_{x\to \pi} \frac{۱ + \cos^{۳} x}{\sin^{۲} x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۱۶) معادله‌ی دایره‌ای که نقاط $A(۱, ۰)$ و $B(۳, ۲)$ دو سر قطری از آن هستند، کدام است؟

۱) $x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۲y + ۳ = ۰$ ۲) $x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۲y - ۳ = ۰$

۳) $x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۴y + ۳ = ۰$ ۴) $x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۴y - ۳ = ۰$

۱۷) وضعیت دو دایره‌ی $(x-۱)^{۲} + (y-۲)^{۲} = ۴$ و $x^{۲} + y^{۲} + ۴x + ۲y + ۱ = ۰$ نسبت به هم چگونه است؟

۱) متخارج هستند ۲) مماس درون ۳) مماس بیرون ۴) متقاطع

۱۸) فرض کنید خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۴, -۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵} - ۲$

۱۹) از دو نقطهٔ $A(-۴, ۱)$ و $B(۲, ۵)$ دایره‌ای عبور کرده است. اگر AB بزرگ‌ترین وتر این دایره باشد، آن‌گاه این دایره محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰) اگر دو دایره گذرا از نقطهٔ $(۲, ۱)$ بر هر دو محور مختصات مماس باشند، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۱) بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دایره‌های $x^{۲} + y^{۲} + ۲x - ۲y + ۱ = ۰$ و $x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۶y + ۹ = ۰$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۲) دایره‌ی C به مرکز $O(-۲, ۱)$ و مماس بر خط $۳x - ۴y - ۵ = ۰$ را در نظر بگیرید. طول وتری از دایره که منطبق بر محور xها می‌باشد برابر کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۳) در مورد مقطع مخروطی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) منحنی بر محور y ها مماس است.

۲) منحنی در ناحیهٔ اول و چهارم دستگاه مختصات قرار دارد.

۳) فاصلهٔ مرکز منحنی تا محور x ها برابر یک است.

۴) طول وتر ایجاد شده توسط منحنی روی محور x ها برابر $\sqrt{۳}$ می‌باشد.

۲۴) دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$ روی دو خط $x + y + ۱ = ۰$ و $y - x = c$، وترهای مساوی ایجاد کرده است. مقدار c کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) صفر

۲۵) خط $x + ۲y = ۲$ محورهای مختصات را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر O مبدأ مختصات باشد، معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث OMN کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ + ۲x - y = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۲x - y = ۰$ ۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - y = ۱$

۴) $x^۲ + y^۲ + ۲x + y = ۱$

۲۶) چند مقدار طبیعی برای طول مرکز دایره‌ای که روی محور x ها قرار دارد و بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مماس است و شعاع آن کم‌تر از $\sqrt{۲}$ می‌باشد، وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۲۷) نقطهٔ $A(۲, ۱)$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر M نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا A و N دورترین نقطهٔ دایره تا A باشد، آن‌گاه حاصل $AM \times AN$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۲}$ ۳) ۱۳ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۲۸) نقطه‌ی $A(۳, ۶)$ روی دایره‌ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۱۲ و ۲ ۲) ۱۵ و ۲ ۳) ۹ و ۳ ۴) ۱۵ و۳

۲۹) دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(۸, ۷)$ می‌گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۰) دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

۱) $(-۳, ۲)$ ۲) $(-۳, ۱)$ ۳) $(-۲, ۱)$ ۴) $(-۱, ۲)$

۳۱) درون یک کامیون کیسه‌های ۲۰ و ۵۰ کیلویی سیمان وجود دارد. اگر وزن کل بار برابر ۲۴۳۰ کیلوگرم باشد، به چند حالت ممکن است این بار درون این کیسه‌ها باشد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۳۲) اگر $A = (۲^{۲۳} + ۷) \times ۸$ باشد، باقیمانده‌ی A بر ۲۳ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۷ ۳) ۷ ۴) ۳

۳۳ باقیمانده تقسیم $۱۱^{۱۰۰} + ۱۰^{۱۱۰}$ بر ۳۳ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۳۴ به چند طریق می‌توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۳۵ معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۴y = ۱۱۰$ چند دسته جواب در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۶ اگر اول مهر یک سال روز شنبه باشد، اولین جمعهٔ ماه اسفند در آن سال چه روزی از این ماه است؟

۱) سوم ۲) چهارم ۳) پنجم ۴) ششم

۳۷ رقم یکان عدد $۷^{۱۹۵} + ۳^{۹۱}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۸ اگر $۲۴x + ۳۴y = ۲۰۲$، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $x \overset{۱۷}{\equiv} ۷$ ۲) $y \overset{۱۲}{\equiv} ۱$ ۳) $y \overset{۶}{\equiv} ۱$ ۴) $x \overset{۱۷}{\equiv} ۱$

۳۹ جواب‌های عمومی معادله‌ی هم‌نهشتی $x \overset{۵}{\equiv} ۸$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $۵k - ۳$ ۲) $۸k + ۵$ ۳) $۸k - ۵$ ۴) $۵k + ۳$

۴۰ اگر $a = ۹k + ۵$، باقی‌مانده ی $a^۲ + ۳a + ۱$ بر ۹ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، آنگاه برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، ابتدا عامل $(x-a)$ را از صورت و مخرج حذف و سپس حد تابع حاصل را محاسبه می‌کنیم.

حد صورت و مخرج برابر صفر است، پس ابتدا هر دو را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+x-2 \\ \hline x^2-3x+2 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline -2x+2 & \\ -(-2x+2) & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

از طرفی با توجه به اتحاد جمله مشترک داریم: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

با جای‌گذاری این مقادیر در کسر داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-2}=\frac{1+1-2}{1-2}=0$$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 2} x^2-3x+2=0$، پس برای آنکه $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+b}{x^2-3x+2}$ برابر عدد حقیقی L باشد، باید حد صورت این کسر نیز در نقطه‌ی $x=2$ برابر صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+b)=0\Rightarrow 4-10+b=0\Rightarrow b=6$$

اکنون با جای‌گذاری مقدار $b=6$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=-1\Rightarrow L=-1$$

بنابراین: $b+L=6+(-1)=5$

۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ، آنگاه برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نمی‌توانیم از قضیهٔ حد خارج‌قسمت استفاده کنیم؛ بلکه باید با تجزیهٔ صورت و مخرج به عامل‌های مناسب، حاصل را به‌دست بیاوریم.

برای حذف عامل صفرکننده، تابع موردنظر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنی:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x+5}-1}{4-x^2}=\lim_{x\to -2}\left(\frac{\sqrt{2x+5}-1}{4-x^2}\times\frac{\sqrt{2x+5}+1}{\sqrt{2x+5}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x+5-1}{(4-x^2)(\sqrt{2x+5}+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)}{(2-x)(2+x)(\sqrt{2x+5}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2}{(2-x)(\sqrt{2x+5}+1)}=\frac{2}{4\times 2}=\frac{1}{4}$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادلهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=x+۲$ (با شرط $x\neq ۱$) است. با جای‌گذاری ضابطهٔ f در عبارت داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۵)f(x)}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۵)(x+۲)}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۵)(x+۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۵}{x-۲}=\frac{۳}{-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته : $|u|=\begin{cases}u & u\geq ۰\\ -u & u<۰\end{cases}$

نکته: تابع $f(x)$ در $x=a$ حد دارد، هرگاه: $\lim_{x\to a^{+}}f(x)=\lim_{x\to a^{-}}f(x)$

ابتدا با کمک بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

$$f(x)\begin{cases}x+a & x>۴\\ -(x+a) & x<۴\end{cases}$$

اکنون باید حد چپ و حد راست در $x=۴$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۴^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^{+}}(x+a)=۴+a\\ \lim\limits_{x\to ۴^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^{-}}(-x-a)=-۴-a\end{cases}\Rightarrow ۴+a=-۴-a\Rightarrow ۲a=-۸\Rightarrow a=-۴$$

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با جای‌گذاری مقدار ۱- خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^{۳}+x-۲}=\frac{-۱-۱}{-۱-۱-۲}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته : $\mathrm{Cos}\,۲x=\mathrm{Cos}^{۲}x-\mathrm{Sin}^{۲}x\Rightarrow ۱-\mathrm{Cos}\,۲x=۲\,\mathrm{Sin}^{۲}x$

نکته: ، یعنی وقتی $u\to ۰$ می‌توان در محاسبه‌ی حد به‌جای $\mathrm{Sin}\,u$ مقدار u را قرار داد.

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\mathrm{Cos}\,۲x}{۳ax^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\mathrm{Sin}^{۲}x}{۳ax^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲(x)^{۲}}{۳ax^{۲}}=\frac{۲}{۳a}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}۶\Rightarrow a=\frac{۱}{۹}$$

۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\mathrm{Sin}x-\mathrm{tan}x}{x\mathrm{Cos}x-x}=\frac{۰-۰}{۰-۰}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\mathrm{Sin}x-\mathrm{Sin}x}{\frac{\mathrm{Cos}x}{x(\mathrm{Cos}x-۱)}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\mathrm{Sin}x\left(\frac{\mathrm{Cos}x-۱}{\mathrm{Cos}x}\right)}{x(\mathrm{Cos}x-۱)}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\mathrm{Sin}x}{x}\right)\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\mathrm{Cos}x}=۱\times ۱=۱$$

۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-6x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}\times\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1-6x}}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-6x}}\times\frac{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-4x-1+6x}{1+4x-1+2x}\times\left(\frac{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-6x}}\right)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{3}$$

روش دیگر: استفاده از هم‌ارزی برنولی: $\boxed{(1+u)^n\underset{u\to 0}{\equiv}1+nu}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}}-(1-6x)^{\frac{1}{2}}}{(1+4x)^{\frac{1}{2}}-(1-2x)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\times 4x-\left(1-\frac{1}{2}\times 6x\right)}{1+\frac{1}{2}\times 4x-\left(1-\frac{1}{2}\times 2x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+3x}{2x+x}=\frac{1}{3}$$

۱۰ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to -1}\frac{mx^3+3x+mx^2+3}{x^2-(2m-1)x-2m}=\frac{-m-3+m+3}{1+2m-1-2m}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{mx^2(x+1)+3(x+1)}{x^2+x-2mx-2m}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(mx^2+3)}{(x+1)(x-2m)}=\frac{m+3}{-1-2m}=-1\Rightarrow m+3=2m+1\Rightarrow m=2$$

۱۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر $x=0$ را قرار دهیم چون $\cot(0)$ تعریف نمی‌شود، به نتیجه‌ای نمی‌رسیم. پس به جای $\cot x$ می‌نویسیم $\frac{1}{\tan x}$:

$$\frac{\cot 3x}{\cot 2x}=\frac{\frac{1}{\tan 3x}}{\frac{1}{\tan 2x}}=\frac{\tan 2x}{\tan 3x}$$

حالا حد این تابع در $x=0$ را به سادگی حساب می‌کنیم. می‌دانیم: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{x}=\alpha$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\tan 3x}{x}}=\frac{2}{3}$$

البته با هم‌ارزی $\tan u\underset{x\to 0}{\sim}u$ هم به جواب می‌رسیم.

۱۲ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-16 & x-2 \\ \hline 3x^2-6x & 3x+8 \\ \hline 8x-16 & \\ 8x-16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس برای $x\neq 2$ می‌توان گفت این تابع همان $y=3x+8$ است و نقطه‌ی توخالی B، همان $x=2$ بوده است که عرضش ۱۴ است اما روی تابع قرار ندارد. پس $y_B=3(2)+8=14$ و $y_A=3(0)+8=8$ یعنی عرض‌های دو نقطه ۶ واحد اختلاف دارند.

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است، $f(-۱)=۰$ است.

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow -۱-۲+m=۰ \Rightarrow m=۳$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)}{x^۳+x^۲}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳+۲x+۳}{x^۳+x^۲}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۳)}{x^۲(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-x+۳}{x^۲}=۵$$

۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

شیب خط داده شده برابر ۴- و عرض از مبدأ آن ۴ است، پس ضابطهٔ آن به شکل زیر است:

$$f(x)=-۴x+۴$$

هم‌چنین یکی از ریشه‌های سهمی، عدد ۱ است پس ضابطهٔ آن به شکل زیر است:

$$g(x)=a(x-۱)(x-b)$$

چون عرض از مبدأ تابع ۴- است، داریم:

$$g(۰)=-۴ \Rightarrow ab=-۴ \ (*)$$

حل حد داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{g}{f}=\lim_{x\to ۱}\frac{a\cancel{(x-۱)}(x-b)}{-۴\cancel{(x-۱)}}=\frac{a(۱-b)}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow a-ab=۲ \Rightarrow a=ab+۲ \xrightarrow{(*)} a=-۲ \xrightarrow{(*)} b=۲$$

۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \pi}\frac{۱+\cos^۳x}{\sin^۲x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to \pi}\frac{(۱+\cos x)(۱-\cos x+\cos^۲x)}{۱-\cos^۲x}$$

$$=\lim_{x\to \pi}\frac{\cancel{(۱+\cos x)}(۱-\cos x+\cos^۲x)}{\cancel{(۱+\cos x)}(۱-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to \pi}\frac{۱-\cos x+\cos^۲x}{۱-\cos x}=\frac{۱-(-۱)+(-۱)^۲}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

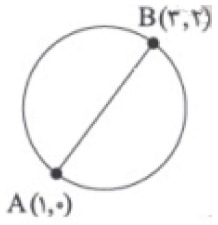
۱۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره: $\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۲+۰}{۲}\right)=(۲,۱)$

$$۲r=AB \Rightarrow ۲r=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow r=\sqrt{۲}$$

معادله‌ی دایره : $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲$

$$x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱=۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+۳=۰$$



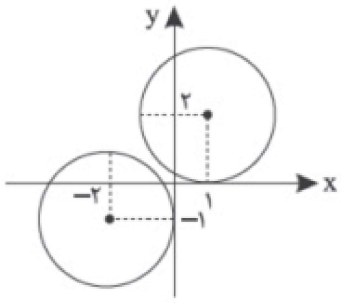
۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$O_۱(۱,۲), r_۱ = ۲$

$O_۲(-۲,-۱), r_۲ = \sqrt{۴+۱-۱} = ۲$

طول خط المرکزین : $O_۱O_۲ = \sqrt{۹+۹} = ۳\sqrt{۲}$ ۴/۲

دو دایره متخارج هستند $\Rightarrow O_۱O_۲ > r_۱ + r_۲$.



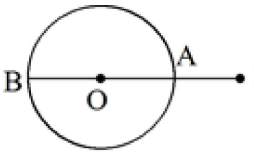
۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطرهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = -۱$$

پس مرکز دایره $O(۲,-۱)$ است. در ضمن فاصله‌ی O تا خط مماس $۴x+۳y+۵=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۸-۳+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

نزدیک‌ترین فاصله‌ی $M(۴,-۲)$ از دایره مساوی $|OM-R|$ است. بنابراین:



$$OM = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

$$MA = \text{نزدیک ترین فاصله} = |OM-R| = \sqrt{۵}-۲$$

۱۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقاط A و B دو سر قطر این دایره هستند در نتیجه:

$$O = \frac{A+B}{۲} = (-۱,۳)$$

$$R = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{۳۶+۱۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۵۲}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$

معادله دایره : $(x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$

دو جواب ۴ $\xrightarrow{y=۰}$ برخورد با محور x $\Rightarrow (x+۱)^۲ + ۹ = ۱۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴$

دو جواب ۱۲ $\xrightarrow{x=۰}$ برخورد با محور y $\Rightarrow ۱ + (y-۳)^۲ = ۱۳ \Rightarrow (y-۳)^۲ = ۱۲$

بنابراین دایره محورهای مختصات را در چهار نقطه قطع می‌کند.

۲۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر معادلهٔ دایره‌ها به شکل $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ باشد، چون دو دایره بر هر دو محور مختصات مماس هستند و هر دو از نقطهٔ $A(۲,۱)$ در ناحیهٔ اول می‌گذرند پس:

$$R=\alpha=\beta\Rightarrow(x-R)^۲-(y-R)^۲=R^۲\xrightarrow{A(۲,۱)}(۲-R)^۲+(۱-R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۴+R^۲-۴R+۱+R^۲-۲R=R^۲\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow(R-۵)(R-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R=۱\Rightarrow O\Big|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\\ R'=۵\Rightarrow O'\Big|\begin{matrix}۵\\۵\end{matrix}\end{cases}\Rightarrow OO'=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}$$

طول مماس مشترک خارجی $=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۳۲-(۵-۱)^۲}=\sqrt{۳۲-۱۶}=۴$

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

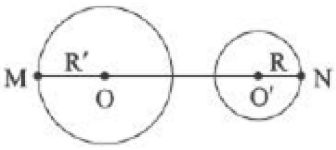
$$\begin{cases}O=(-۱,۱)\\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴}=۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}O'=(۲,-۳)\\ R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۳۶}=۲\end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$OO'>R+R'\Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند

بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره مطابق شکل، MN است.



$$MN=OO+R+R'=۵+۱+۲=۸$$

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

فاصله‌ی مرکز O تا خط مماس شعاع دایره است.

$$R=\frac{|-۶-۴-۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

پس معادله‌ی دایره به صورت زیر است:

$$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۹\xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد با محور}x}(x+۲)^۲=۸\Rightarrow\begin{cases}x=۲\sqrt{۲}-۲\\ x=-۲\sqrt{۲}-۲\end{cases}$$

بنابراین طول وتر ایجاد شده برابر $۴\sqrt{۲}$ است.

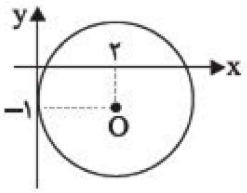
۲۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مقطع داده شده یک دایره است.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow O(۲, -۱)$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۴ - ۴} = ۲$$

حال دایره را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



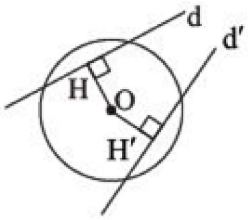
همان‌طور که مشخص شده است دایره بر محور y هاممماس است (طول مرکز = شعاع) و دایره در نواحی اول و چهارم قرار دارد. از روی شکل مشخص است که فاصلهٔ مرکز تا محور x ها برابر یک است.

$$y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۴}}{۲} = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۳}}{۱} = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

$$\text{طول وتر} = (۲ + \sqrt{۳}) - (۲ - \sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳}$$

۲۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم وترهای مساوی در یک دایره از مرکز دایره به یک فاصله هستند، پس باید مرکز دو دایره از دو خط داده شده به یک فاصله باشند.



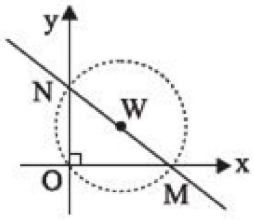
$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (-۱, ۱)$$

$$OH = OH' \Rightarrow \frac{|-۱ + ۱ + ۱|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{|۱ + ۱ - c|}{\sqrt{۱ + ۱}}$$

$$\Rightarrow ۱ = |۲ - c| \Rightarrow \begin{cases} ۲ - c = ۱ \Rightarrow c = ۱ \\ ۲ - c = -۱ \Rightarrow c = ۳ \end{cases}$$

۲۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

خط $x + ۲y = ۲$ محور x ها را در نقطهٔ $M(۲, ۰)$ و محور y ها را در نقطهٔ $N(۰, ۱)$ قطع می‌کند. مثلث OMN قائم‌الزاویه است پس M قطر دایرهٔ موردنظر است، بنابراین مرکز دایرهٔ گذرنده از نقاط O، M و N وسط MN است و شعاع آن برابر $\frac{MN}{۲}$ است.



مرکز $W = \frac{M+N}{۲} = \left(۱, \frac{۱}{۲}\right)$

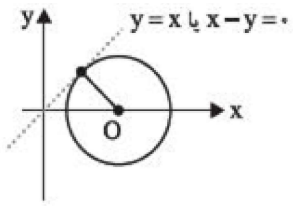
$R = \frac{MN}{۲} = \frac{\sqrt{۴+۱}}{۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث OMN به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲ + \left(y - \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ - y + \frac{۱}{۴} - \frac{۵}{۴} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - y = ۰$$

۲۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره روی محور x ها به صورت $O(\alpha, ۰)$ می‌باشد. دایره بر خط $x - y = ۰$ مماس است و فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط برابر شعاع است. می‌خواهد شعاع کم‌تر از $\sqrt{۲}$ باشد پس:

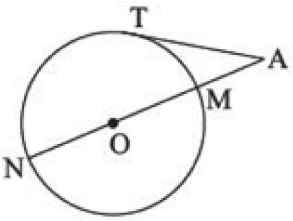


$$\frac{|\alpha - ۰|}{\sqrt{۲}} < \sqrt{۲} \Rightarrow |\alpha| < ۲ \Rightarrow -۲ < \alpha < ۲$$

یک مقدار طبیعی یعنی $\alpha = ۱$ برای طول مرکز وجود دارد.

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطهٔ A خارج از دایره قرار دارد. از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند. در این صورت M نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا A و N دورترین نقطهٔ دایره تا A است. حال مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم پس $AT^۲ = AM \times An$ است داریم:



$$AT = \sqrt{f(A)} = \sqrt{f(۲, ۱)} = \sqrt{۴ + ۱ + ۸} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow AT^۲ = ۱۳$$

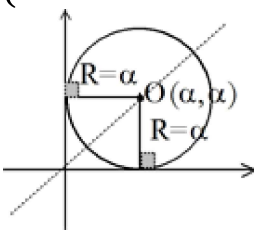
در نتیجه $AM \times AN = ۱۳$ است.

توجه کنید اگر $f(x, y) = ۰$ معادلهٔ یک دایره و نقطهٔ A بیرون این دایره باشد، آن‌گاه طول مماس رسم شده از A بر این دایره برابر $\sqrt{f(A)}$ است.

۲۸ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون نقطه‌ی A در ربع اول است. پس مرکز دایره روی خط $y=x$ قرار دارد، یعنی $O(\alpha,\alpha)$ و شعاع دایره نیز $R=\alpha$ است (به شکل نگاه کنید) بنابراین:

$$C:(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲ \xrightarrow{A\in C} (۳-\alpha)^۲+(۶-\alpha)^۲=\alpha^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=۰ \Rightarrow (\alpha-۱۵)(\alpha-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۳ \Rightarrow R=۳ \\ \alpha=۱۵ \Rightarrow R=۱۵ \end{cases}$$



۲۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع و مرکز دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$، عبارتند از:

مرکز : $O'(۲,-۱)$

شعاع : $R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۲^۲-۴(-۴)}=۳$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره‌ی C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸,۷)$ مرکز دایره‌ی C است.

$$d=OO'=\sqrt{(۲-۸)^۲+(-۱-۷)^۲}=۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d=R+R' \Rightarrow ۱۰=R+۳ \Rightarrow R=۷$$

۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ موازیند بنابراین مرکز دایره روی خط بین آن‌ها به معادله $y=۲x+۵$ قرار دارد. اگر $o(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد آن‌گاه $o(\alpha,۲\alpha+۵)$ و چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد پس فاصله‌ی مرکز o از مبدأ با فاصله o تا خط $y=۲x$ برابر است نتیجه می‌گیریم:

فاصله o تا خط $(y=۲x)$ = فاصله o تا مبدا مختصات

$$\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲}=\frac{|۲\alpha+۵-۲\alpha|}{\sqrt{۱+۴}} \Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha^۲+۲۵+۲۰\alpha=\frac{۲۵}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲+۲۰\alpha+۲۰=۰ \Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha+۴=۰ \Rightarrow (\alpha+۲)^۲=۰ \Rightarrow \alpha=-۲$$

بنابراین مرکز دایره $o(-۲,۱)$ می‌باشد.

۳۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد کیسه‌های ۲۰ و ۵۰ کیلویی را به ترتیب برابر x و y می‌گیریم پس کافی است تعداد جواب‌های نامنفی معادله $۲۰x+۵۰y=۲۴۳۰$ را به‌دست آوریم:

$$۲x+۵y=۲۴۳ \xrightarrow{\text{پیمانه ۲}} ۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۴۳ \Rightarrow ۵b \overset{۲}{\equiv} ۱ \overset{۲}{\equiv} ۵ \Rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y=۲k+۱$$

$$\Rightarrow ۲x+۵(۲k+۱)=۲۴۳ \Rightarrow x=-۵k+۱۱۹$$

$$\begin{cases} x=-۵k+۱۱۹ \geqslant ۰ \\ y=۲k+۱ \geqslant ۰ \end{cases} \Rightarrow k=۰,۱,۲,\ldots,۲۳$$

پس به ۲۴ روش ممکن است ۲۴۳۰ کیلو در کیسه‌های ۲۰ و ۵۰ کیلویی توزیع شده باشند.

۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(۲^{۲۳}+۷)\times ۸ \overset{۲۳}{\equiv} \; ?$$

قضیه‌ی فرما:

$(p$ عدد اول$)\ a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

$(p$ عدد اول$)\ a^{p} \overset{p}{\equiv} a$

۲۳ عدد اول $\Rightarrow ۲^{۲۳} \overset{۲۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow A \overset{۲۳}{\equiv} (۲+۷)\times ۸ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$

۳۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} ۱۰ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۰^{۱۱۰} \overset{۳}{\equiv} ۱ \\ ۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰^{۱۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۰^{۱۱۰} \overset{۳۳}{\equiv} ۱$$

$$۱۱^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۴ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۱^{۱۰۰} \overset{۳}{\equiv} ۲۲, ۱۱^{۱۰۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۲ \Rightarrow ۱۱^{۱۰۰} \overset{۳۳}{\equiv} ۲۲ \Rightarrow ۱۰^{۱۱۰} + ۱۱^{۱۰۰} \overset{۳۳}{\equiv} ۲۳$$

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی را به‌ترتیب با x و y نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۲۷۰۰۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۲۲۷ \Rightarrow ۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۲۷ \Rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k+۱ (k \in Z)$$

$$۲x + ۵(۲k+۱) = ۲۲۷ \Rightarrow ۲x = -۱۰k + ۲۲۲ \Rightarrow x = -۵k + ۱۱۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \Rightarrow -۵k + ۱۱۱ \geq ۰ \Rightarrow k \leq \frac{۱۱۱}{۵} \\ y \geq ۰ \Rightarrow ۲k + ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in Z} ۰ \leq k \leq ۲۲$$

بنابراین ۲۳ مقدار صحیح برای k وجود دارد و در نتیجه به ۲۳ طریق می‌توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

۳۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۷x + ۴y = ۱۱۰ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۱۱۰ \Rightarrow -x \overset{۴}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} -۲ \Rightarrow x = ۴k - ۲ (k \in Z)$$

$$۷(۴k-۲) + ۴y = ۱۱۰ \Rightarrow ۴y = -۲۸k + ۱۲۴ \Rightarrow y = -۷k + ۳۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x > ۰ \Rightarrow ۴k - ۲ > ۰ \Rightarrow k > \frac{۱}{۲} \\ y > ۰ \Rightarrow -۷k + ۳۱ > ۰ \Rightarrow k < \frac{۳۱}{۷} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in Z} k = ۱, ۲, ۳, ۴$$

بنابراین معادلهٔ سیالهٔ مورد نظر، ۴ دسته جواب در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارد.

۳۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا محاسبه می‌کنیم که روز اول اسفند در آن سال چه روزی از هفته است.

$$۲۹+ \quad ۴\times۳۰ \quad + \quad ۱ \quad = ۱۵۰ \Rightarrow ۱۵۰ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

مهر — آبان تا بهمن — اسفند

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
صفر	۱	۲	۳	۴	۵	۶

در صورتی که اول مهر به عنوان مبدأ (صفر) در نظر گرفته شود، طبق جدول روز اول اسفند سه‌شنبه بوده و در نتیجه اولین جمعهٔ ماه اسفند، چهارمین روز این ماه خواهد بود.

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در همنهشتی به پیمانه ۱۰ می‌توان نوشت:

$$۳^۲ = ۹ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۹۱} = ۳(۳^۲)^{۴۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۳(-۱)^{۴۵} \overset{۱۰}{\equiv} -۳$$

$$۷^۲ = ۴۹ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^{۱۹۵} = ۷(۷^۲)^{۹۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۷(-۱)^{۹۷} \overset{۱۰}{\equiv} -۷$$

مجموع دو عدد مفروض همنهشت با ۱۰- به پیمانه ۱۰ یا برابر صفر است.

۳۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲۴x + ۳۴y = ۲۰۲ \xrightarrow{(۲۴,۳۴)=۲} ۱۲x + ۱۷y = ۱۰۱$$

یک معادله‌ی سیاله، به ۲ معادله‌ی همنهشتی تبدیل می‌شود.

$$۱۲x \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰۱ \Rightarrow ۱۲x \overset{۱۷}{\equiv} ۸۴ \xrightarrow{(۱۲,۱۷)=۱} x \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$

گزینه‌ی ۱ درست و گزینه‌ی ۴ نادرست است. بررسی سایر گزینه‌ها:

$$۱۷y \overset{۱۲}{\equiv} ۱۰۱ \Rightarrow ۱۷y \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۱۷y \overset{۱۲}{\equiv} ۱۷ \xrightarrow{(۱۷,۱۲)=۱} y \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow$$ گزینه‌ی ۲ درست است.

به جای پیمانه می‌توان هر مقسوم‌علیه طبیعی آن‌را قرار داد، پس:

$$y \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{۶ \mid ۱۲} y \overset{۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow$$ گزینه‌ی ۳ نیز درست است.

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته‌ی ۱: رابطه‌ی همنهشتی به‌صورت $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله‌ی همنهشتی گوییم که در آن هدف از حل معادله، پیدا کردن همه‌ی xهایی است که در آن‌ها $x \in Z$ و در معادله صدق می‌کند.

نکته‌ی ۲: می‌توان به دو طرف یا یک طرف رابطه‌ی همنهشتی، مضاربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a + mk \overset{m}{\equiv} b \text{ یا } a \overset{m}{\equiv} b + mk \text{ یا } a + mk \overset{m}{\equiv} b + mk'$$

نکته‌ی ۳: مطابق تعریف همنهشتی از رابطه‌ی $x \overset{m}{\equiv} b$ داریم: $x = mk + b$

ابتدا با توجه به نکته‌ی ۲ داریم:

$$x \overset{۵}{\equiv} ۸ \Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۸ - ۵ \Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۳$$

اکنون با توجه به نکته‌ی ۳ داریم:

$$x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۵k + ۳$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه $a^k \overset{m}{\equiv} b^k$ و $ka \overset{m}{\equiv} kb$

$$a = ۹k + ۵ \Rightarrow a \overset{۹}{\equiv} ۵$$

حال با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$a^۲ + ۳a + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۵^۲ + ۳(۵) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۵$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	**۱**	۲	۳	۴
۱۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	**۴**
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	**۱**	۲	۳	۴
۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	۲	۳	**۴**
۲۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴
۲۶	**۱**	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	**۳**	۴
۲۸	۱	۲	۳	**۴**
۲۹	۱	**۲**	۳	۴
۳۰	۱	۲	**۳**	۴
۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۳۲	۱	۲	۳	**۴**

۳۳	۱	۲	۳	**۴**
۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	۱	**۲**	۳	۴
۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	**۴**
۳۹	۱	۲	۳	**۴**
۴۰	۱	۲	**۳**	۴